Mathematik: Inhalte der Oberstufe

Long Hu, Alexander Heinlein

22. April 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Analysis

1.1 Funktionen und ihre Ableitungen

1.1.1 Potenzfunktionen

- ***Potenzregel:***
  Für $f(x) = x^k$ *mit* $k \in Z$ *ist* $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$
- ***Summenregel:***
  Für $f(x) = g(x) + h(x)$ *mit ist* $f'(x) = g'(x) + h'(x)$
- ***Faktorregel:***
  Für $f(x) = c \cdot g(x)$ *mit* $c \in R$ *ist* $f'(x) = c \cdot g'(x)$

1.1.2 Trigonometrische Funktionen

- *Für die Funktion* f *mit* $f(x) = \sin(x)$ *ist* $f'(x) = \cos(x)$.
- *Für die Funktion* g *mit* $g(x) = \cos(x)$ *ist* $f'(x) = -\sin(x)$.

1.1.3 Verkettete Funktionen

- ***Definition:***
  Gegeben sind die Funktion $v : x \to v(x)$ *und* $u : v \to u(v)$. *Die Funktion* $u \circ v : x \to u(v)$, *bei welcher der Funktionstherm* $v(x)$ *an die Stelle* v *der Funktion* u *tritt, nennt man eine Verkettung der Funktionen* u *und* v. *Die Definitionsmenge von* $u \circ v$ *besteht aus allen* $x \in D_v$, *für die* $v(x)$ *zu* D_u *gehört.*
- ***Kettenregel:***
  Wenn $f = u \circ v$ *eine Verkettung aus zwei differzierbaren Funktionen* u *und* v *ist, dann ist auch* f *differenzierbar und es gilt* $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$. *(MERKREGEL: „ÄUSSERE ABLEITUNG MAL INNERE ABLEITUNG“)*

1.1.4 Rationale Funktionen

Gebrochenrationale Funktionen (und ganzrationale Funktionen)

- ***Definition:***
  Eine Funktion f *mit*
  $f(x) = \frac{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0}{b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0}$, $a_i, b_i \in R, a_n, b_m \neq 0$,
  heißt ***gebrochenrational****, wenn diese Darstellung nur mit einem Nennerpolynom möglich ist, dessen Grad mindestens 1 ist. Andernfalls wird die Funktion* ***ganzrational*** *genannt.*

Ableitung von Produkten

- ***Produktregel:***
  Wenn die Funktionen u *und* v *differenzierbar sind, dann ist auch die Funktion* $f = u \cdot v$ *differenzierbar und es ist* $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Ableitung von Quotienten

- ***Quotiententregel:***
  Wenn die Funktionen u *und* v *differenzierbar sind, mit* $v(x) \neq 0$, *dann ist auch die Funktion* $f : x \to \frac{u(x)}{v(x)}$ *differenzierbar und es ist* $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$.

1.1.5 Umkehrfunktion und ihre Ableitung

Umkehrbarkeit

- ***Definition:***
  Eine Funktion ist umkehrbar genau dann, wenn sie bijektiv ist, das heißt sowohl surjektiv als auch injektiv.

  1. ***Surjektivität:*** *Die Zielmenge ist gleich der Wertemenge bzw.* $Z_f = W_f$.
  2. ***Injektivität:*** *Für jedes* $x_1 \neq x_2$ *ist auch* $f(x_1) \neq f(x_x)$.

- *Jede streng monotone Funktion ist umkehrbar, insbesondere ist eine differenzierbare Funktion f in einem Intervall I für alle $x \in I$ umkehrbar, wenn $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ ist.*

1.1.6 Ableitung der Umkehrfunktion

- *Wenn eine Funktion f in einem Intervall I umkehrbar und diffenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für $x \in I$ ist, dann ist auch die Umkerhfunktion f^{-1} ebenfalls differenzierbar und es gilt:*
  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ *mit* $y = f(x)$ *und* $x = f^{-1}(y)$

1.1.7 Exponential- und Logarithmusfunktion

- ***Eigenschaften der Funktion*** $f : x \rightarrow c \cdot a^x$***:***
  Funktionen mit f mit $f(x) = a^x$ oder g mit $g(x) = c \cdot a^x$, $c \in R$, $a > 0$, $x \in R$, nennt man Exponentialfunktionen zur Basis a. Einen Vorgang, der durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann, nennt man auch exponentielles Wachsum. Daher werden Exponentialfunktion auch als Wachstums oder Zerfallsfunktionen bezeichnet.

Natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung

- *Der Grenzwert*
  $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$
  existiert und ist eine irrationale Zahl. Diese Zahl heißt eulersche Zahle und wir mit e bezeichnet. Es ist $e = 2,71828....$

- *Die natürliche Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ hat die Ableitungsfunktion $f'(x)$ mit $f'(x) = e^x$. Ihre Stammfunktion ist F mit $F(X) = e^x$.*

- ***Zusammengesetzte Funktionen:***
  Die Funktion f mit $f(x) = e^{v(x)}$ ist eine Verkettung der Funktion $f : x \rightarrow v(x)$ mit der Exponentialfunktion $u : v \rightarrow u(v) = e^v$. Existiert die Ableitung f', so gilt nach der Kettenregel $f'(x) = e^{v(x)} \cdot v'(x)$.

Natürliche Logarithmusfunktion und ihre Ableitung

- ***Definition:***
  Die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion heißt natürliche Logarithmusfunktion. Sie wird mit $x \rightarrow \ln(x)$; $x \in R^+$ bezeichnet.

-
  1. *Die natürliche Logarithmusfunktion f mit $f(x) = \ln(x)$ mit $x \in R^+$ hat die Ableitungsfunktion $f'(x)$ mit $f'(x) = \frac{1}{x}$.*
  2. *Eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $x \neq 0$ ist die Funktion F mit $F(x) = \ln(|x|)$.*
  3. *Eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ ist die Funktion F mit $F(x) = \ln(|u(x)|)$.*

- ***Logarithmengesetze (mit*** $u, v \in R^+$***)***

  1. $\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$
  2. $\ln(\frac{u}{v}) = \ln(u) - \ln(v)$
  3. $\ln(u^k) = k \cdot \ln(u)$

Exponential- und Logarithmusfunktionen mit beliebigen Basen

1. *Für alle* $x > 0$ *gilt* $e^{\ln(x)} = x$. *Für alle* $x \in R$ *gilt* $\ln(e^x) = x$.
2. *Jede Exponentialfunktion* f *mit* $f(x) = a^x$ *mit* $a > 0, x \in R$ *ist darstellbar mit Hilfe der Basis e:* $f(x) = e^{x \cdot \ln(a)}$.
3. *Jede Logarithmusfunktion* f *mit* $f(x) = \log_a(x)$ *mit* $a > 0$, $x > 0$ *ist darstellbar mit Hilfe des natürlichen Logarithmus:* $f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

1.2 Funktionsdiskussion

1. ***Definitionsmenge*** *und* ***Wertemenge*** *angeben.*
2. ***Nullstellen*** *berechnen:*
   Wenn $f(x_0) = 0$, *dann ist* x_0 *eine Nullstelle von* f.
3. ***Symmetrieverhalten*** *untersuchen.*
   a) ***Achensymmetrie:***
      Wenn $f(2 \cdot a - x) = f(x)$, *dann ist der Funktionsgraph zur Achse* $x = a$ *symmetrisch.*
   b) ***Punktsymmetrie:***
      Wenn $f(2 \cdot a - x) = 2 \cdot b - f(x)$, *dann ist der Funktionsgrap zum Punkt (a|b) symmetrisch.*
4. ***Unendlichkeitsstellen*** *herausfinden:*
   Falls die Funktion an einer Stelle x_0 *eine Definitionslücke besitzt und sie für* $x \to x_0$ *gegen* $\pm\infty$ *geht, besitzt sie an dieser Stelle eine* ***senkrechte Asymptote*** *bzw. eine Unendlichkeitsstelle.*
5. ***Ableitungen*** *berechnen. (*$f'(x)$, $f''(x)$ *und gegebenenfalls* $f'''(x)$*)*
6. ***Lokale Extremstellen*** *bestimmen:*
   a) ***Notwendige Bedingung:***
      $f'(x_0) = 0$
   b) ***Hinreichende Bedingung:***
      f' *hat an der Stelle* x_0 *einen Vorzeichenwechsel bzw.* $f'(x_0) = 0$ ***und*** $f''(x_0) \neq 0$.
      Ist $f''(x_0) > 0$, *dann liegt an der Stelle* x_0 *ein lokales Minimum vor, für* $f''(x_0) < 0$ *ist an der Stelle* x_0 *ein lokales Maximum.*
7. ***Wendestellen*** *bestimmen:*
   a) ***Notwendige Bedingung:***
      $f''(x_0) = 0$
   b) ***Hinreichende Bedingung:***
      f'' *hat an der Stelle* x_0 *einen Vorzeichenwechsel bzw.* $f''(x_0) = 0$ ***und*** $f'''(x_0) \neq 0$.
      Ist $f'''(x_{0)} > 0$, *dann liegt an der Stelle* x_0 *ein Rechts-Links-Krümmungswechsel vor, für* $f'''(x_0) < 0$ *ist an der Stelle* x_0 *ein Links-Rechts-Krümmungswechsel.*
8. *Fernverhalten bestimmen.*
   Man lässt x gegen die Grenzen des Definitionsbereiches gehen (für $D_f = R$ *zum Beispiel gegen* ∞*) und bestimmt entweder den Grenzwert, oder prüft, ob der Graph gegen* $\pm\infty$ *geht.*
9. *Graphen zeichnen.*

1.3 Integralrechnung

1.3.1 Einleitung

- *Kennt man die momentane Änderungsrate einer Größe, so kann man die Änderung der Größe als einen Flächeninhalt unter einer Kurve bertachten. Daher sucht man nach Methoden solche Flächeninhalte zu bestimmen.*

1.3.2 Näherungsweise Berechnung von Flächeninhalten

- *Gegeben sei eine stetige Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für $x \in [a;b]$. Um den Flächeninhalt A zwischen der dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall $[a;b]$ näherungsweise zu berechnen, kann man folgenderweise vorgehen.*

  1. *Man wählt eine feste Zahl n und unterteilt das Intetvall $[a;b]$ in n Teilintervalle der Breite $h = \frac{b-a}{n}$.*
  2. *Aus jedem Teilintervall wählt man eine Stelle x_i für $i = 1,2,...,n$ und berechnet den zugehörigen Funktionswert $f(x_i)$.*
  3. *Man berechnet als Näherungswert für den Flächen Inhalt die Produktsumme $S_n = h \cdot f(x_1) + h \cdot f(x_2) + ... + h \cdot f(x_n) = h \cdot [f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)]$.*

1.3.3 Betrachtung des Flächeninhalts als Grenzwert

- ***Definition:***
  Gegeben ist die steige Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für $x \in [a;b]$. Für jedes $n \in N^*$ sei U_n eine Untersumme und O_n eine Obersumme, dann wird durch den gemeinsamen Grenzwert

  $$\lim_{n\to\infty} U_n = lim_{n\to\infty} O_n$$

  , der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über $[a;b]$ definiert.

1.3.4 Einführung des Integrals

- ***Definition:***
  Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a;b]$ stetig. Für jedes $n \in N^*$ sei S_n eine Produktsumme mit $S_n = h \cdot f(x_1) + h \cdot f(x_2) + ... + h \cdot f(x_n)$ und $h = \frac{b-a}{n}$. Dann heißt der Grenzwert n

  $$\lim_{n\to\infty} S_n$$

  das Integral der Funktion f in den Grenzen a und b. Man schreibt dafür:

  $$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

1.3.5 Stammfunktion

- ***Definition:***
  Gegeben sei eine auf einem Intervall I definierte Funktion f. Eine Funktion F heißt Stammfunktion von f im Intervall I, wenn für alle $x \in I$ gilt: $F'(x) = f(x)$

1.3.6 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

1. *Die Integralfunktion J_a von f ist eine Stammfunktion von f.*

2. ***Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:***
   Die Funktion f sei auf dem intervall I stetig. Wenn F eine beliebige Stammfunktion von f in I ist, dann gilt für $a, b \in I$:

   $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1.3.7 Regeln

- ***Satz1:***

  1. ***Intervalladditivität des Integrals:***

  $$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

2. a) ***Linearität des Integrals:***

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

b)

$$\int_a^b r\cdot f(x)dx = r\cdot \int_a^b f(x)dx$$

- *f und g sind auf dem Intervall I stetig, $a,b,c \in I$ und $r \in R$.*
- ***Monotonie des Integrals:***
  f und g sind auf dem Intervall $[a;b]$ stetig und ist $f(x) \leq g(x)$ für $x \in [a;b]$, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

1.3.8 Produktintegration oder Partielle Integration

- $$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx$$
- *Eine Stammfunktion von f mit $f(x)=\ln(x)$ ist die Funktion $F(x) = x\cdot\ln(x) - x$*

1.3.9 Substitution

- $$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$
- $$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)dt$$

1.3.10 Uneigentliche Integrale

1. *ist f $[a;\infty[$ stetig und existiert*

   $$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

   , dann heißt dieser Grenzwert das uneigentlich Integral von f über dem Intervall $[a;\infty[$. Das gleiche gilt für das Intervall $]-\infty;b]$.

2. *f ist auf dem Intervall $]a;b]$ stetig und existiert*

   $$\lim_{z\to a}\int_z^b f(x)dx$$

   , so heißt dieser Grenzwert das uneigentliche Integral von f über dem Intervall $]a;b]$. Das gleiche gilt für Intervall $[a;b[$.

2 Algebra

2.1 Lösung von Linearen Gleichungssystemen

2.1.1 Das Gauss-Verfahren

- *Jedes LGS lässt sich mit folgenden Äquivalenzumformungen auf eine Stufenform bringen:*
  1. *Gleichungen miteinander vertauschen.*
  2. *Eine Gleichung mit einer Zahl $c \neq 0$ multiplizieren.*
  3. *Eine Gleichung durch die Summe oder die Differenz eines Vielfachen (Faktor ungleich 0) von ihr und einem Vielfachen einer anderen Gleichung ersetzen.*

- *Beispiel für die Stufenform:*
$$\begin{array}{ll} I. & a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ II. & \qquad\quad a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ III. & \qquad\qquad\qquad\quad a_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{array}$$

- *Vollständiges Gauss-Verfahren: Man löst ein LGS mit n Variablen, indem man es zunächst mit Hilfe der Äquivalenzumformungen 1, 2 und 3 auf Stufenform bringt und dann schrittweise nach den Variablen x_n, x_{n-1}, ..., x_2, x_1 auflöst.*

2.1.2 Determinanten und Cramer'sche Regel

- *Besitzt ein LGS mit zwei Gleichungen und zwei Variablen genau eine Lösung, so kann man diese Lösung folgendermaßen bestimmen:*
  $I. \quad a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1$
  $II. \quad a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$
  Dann ist
  $x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$ *und*
  $x_2 = \frac{a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$.

- *Statt $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ schreibt man auch $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ Dies nennt man auch eine Determinante.*

- *Satz(Cramer'sche Regel): Besitzt das LGS*
  $I. \quad a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1$
  $II. \quad a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$
  genau eine Lösung, dann schreibt man diese auch so:
$$x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; x_2 = \frac{a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} = \frac{a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

- *Besteht ein LGS aus drei Gleichungen mit drei Variablen, so lässt sich dieses Verfahren übertragen, wenn man drei Determinanten folgendermaßen festlegt:*
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

2.1.3 Regel von Sarrus

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

2.2 Lineare Unabhängigkeit

- *Die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$ sind **linear unbabhänig**, wenn gilt: Das homogene lineare Gleichungssystem $r_1 \cdot \vec{v}_1 + r_2 \cdot \vec{v}_2 + ... + r_n \cdot \vec{v}_n = 0$, mit r_1, r_2, ..., $r_n \in R$, besitzt nur die eine Lösung, $r_1 = r_2 = ... = r_n = 0$.*

2.3 Basis und Dimension

- *Eine Basis des Vektorraums V heißen n linear unabhängige Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$ mit $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n \in V$, wenn man alle Vektoren aus V als Linearkombination von $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$ darstellen kann.*

- *Die Dimension eines Vektorraumes V ist die Anzahl der Vektoren einer Basis von V.*

2.4 Das Skalarprodukt

2.4.1 Definition

1. Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt:
   $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

2. Für $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:
   $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$
   Wenn die beiden Vektoren orthogonal zueinander sind, dann ist $\cos(\varphi) = 0$*, also ist auch das Skalarprodukt 0.*

2.5 Abgeschlossenheit von Vektorräumen

- *Eine nicht leere Menge V wird Vektorraum gennant, und ihre Elemente Vektoren, wenn gilt:*

  1. *V ist abgeschlossen bezüglich der Addition: $\vec{a}$, $\vec{b} \in V$ wird ein Element $\vec{a} + \vec{b} \in V$ zugeordnet.*
     a) **Existenz eines neutralen Elementes**: Es existiert ein Element $\vec{0} \in V$ für das $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ mit $\vec{a} \in V$.
     b) **Existenz eines inversen Elementes**: Es existiert zu jedem Element $\vec{a} \in V$ ein Element $-\vec{a} \in V$ für das $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ gilt.
     c) **Gültigkeit des Assoziativgesetzes**: Für alle $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c} \in V$ gilt: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
     d) **Gültigkeit des Kommutativgesetzes**: Für alle $\vec{a}$, $\vec{b} \in V$ gilt: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
  2. *V ist (eingeschränkt) abgeschlossen bezüglich der Multiplikation: $\vec{a}$, $\vec{b} \in V$ wird ein Element $\vec{a} \cdot \vec{b} \in V$ zugeordnet.*
     a) **Existenz eines neutralen Elementes**: Es gilt $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ mit $\vec{a} \in V$.
     b) **Gültigkeit des Assoziativgesetzes**: Für alle $r, s \in R$ und für $\vec{a} \in V$ gilt: $r \cdot (s \cdot \vec{a}) = (r \cdot s) \cdot \vec{a}$.
     c) **Gültigkeit des Distributivgesetz**: Für alle $r, s \in R$ und für $\vec{a} \in V$ gilt: $(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$.

2.6 Das Vektorprodukt

2.6.1 Definition

- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$

2.6.2 Satz 1

- *Für $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ in R^3 gilt:*
  1. $\vec{c}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$
  2. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem.
  3. Der Betrag von $\vec{c}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms: $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$

2.6.3 Satz 2

- *Der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Spat hat das Volumen:* $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

2.7 Ebenenformen

- *$\vec{u}$, $\vec{v}$ sind Richtungsvektoren.*
- *s und t sind Parameter.*
- *$\vec{p}$ ist ein Stützverktor.*
- *$\vec{n}$ ist ein Normalenvektor, $\vec{n_0}$ ist sein Einheitsvektor.*

2.7.1 Parameterform

- $E : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$ *mit* $s, t \in R$

2.7.2 Normalenform

- $E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

2.7.3 Koordinatenform

- *E:* $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = \vec{p} \cdot \vec{n}$ *oder allgemein*
- *E:* $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b$

2.7.4 Hesse'sche Normalenform

- $E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0} = 0$

2.8 Einheitsvektor

- $\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

2.9 Länge eines Vektors

- Die Länge eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gleich dessen Betrag $|\vec{a}|$. Für den Betrag eines Vektors gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

2.10 Abstand eines Punktes von einer Ebene

- $\vec{p}$ *ist ein Stützverktor.*
- $\vec{n}$ *ist ein Normalenvektor,* $\vec{n}_0$ *ist sein Einheitsvektor.*
- $\vec{r}$ *ist der Ortsvektor des Punktes.*
- d *ist der kürzeste Abstand zwischen einer Ebene und einem Punkt.*

2.10.1 Mit der Hesse'schen Normalenform

- $d = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$

2.10.2 Mit Koordinatendarstellung von der Hesse'schen Normalenform

- $d = |\frac{n_1 \cdot r_1 + n_2 \cdot r_2 + n_3 \cdot r_3 - \vec{p} \cdot \vec{n}}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}|$

2.11 Schnittwinkel

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ *sind Richtungsvektoren von einer Gerade.*
- $\vec{n}$ *ist ein Normalenvektor einer Ebene.*
- α *ist der Schnittwinkel.*

2.11.1 Gerade - Gerade

- $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

2.11.2 Gerade - Ebene

- $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

2.11.3 Ebene - Ebene

- $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

3 Stochastik

3.1 Mehrstufige Zufallsexperimente

3.1.1 Baumdiagramme

1. ***Pfadregel 1(Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses):***
   Multipliziere die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades, der dieses Ergebnis beschreibt.

2. ***Pfadregel 2(Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses):***
   Addiere die Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu diesem Ereignis gehören.

3.1.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- *A und B beschreiben Ereignisse, die bei einem Zufallsexperiment eintreten können.*
- $\overline{A}$ *ist das Ereignis, wenn A nicht eintritt.*

Definition

- *Eine Wahrscheinlichkeit für B unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist, nennt man eine durch A bedingte Wahrscheinlichkeit von B. Man schreibt auch* $P_A(B)$.
- *Wenn* $P(B) = P_A(B)$, *dann ist B stochastisch unabhängig von A.*

Regeln für bedingte Wahrscheinlichkeiten

1. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$. *Damit gilt auch:* $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ *mit* $P(A) \neq 0$.
2. *Falls* $P(B) = P_A(B)$, *dann ist* $P(B) = P_{\overline{A}}(B)$
3. *Falls* $P(B) = P_A(B)$, *dann ist* $P(A) = P_B(A)$

3.1.3 Bernoulli-Ketten

- *Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment bei dem es nur zwei mögliche Ergebnisse gibt. Zum Beispiel Treffer und Niete.*
- *Eine Bernoulli-Kette ist ein mehrstufiges Zufallsexperiment aus n Bernoulli-Experimenten, bei denen sich im Verlauf des mehrstufigen Zufallsexperiments die Ergebniswahrscheinlichkeiten nicht ändern.*
- ***Satz:***
  Für eine Bernoulli-Kette mit der Länge n ($n \in N$*) und der Trefferwahrscheilichkeit p gilt:*
  $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
  X *gibt die Trefferanzahl k mit* $k \leq n$ *an.*

Hinweis: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{n! \cdot (n-k)!}$

3.1.4 Erwartungswert

- ***Definition:***
  Kann eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ *annehmen, so heißt*
  $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + ... + x_n \cdot P(X = x_n)$
  Erwartungswert der Zufallsgröße. Statt $E(X)$ *schreibt man auch kurz* μ.

3.1.5 Standartabweichung

- ***Definition:***
  Kann eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, ..., x_n$ annehmen, so heißt
  $V(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - E(X))^2 \cdot P(X = x_2) + ... + (x_n - E(X))^2 \cdot P(X = x_n)$
  Varianz der Zufallsgröße. Statt $V(X)$ schreibt man auch σ^2.

- $\sqrt{V(X)}$ *heißt Standartabweichung von X. Statt $\sqrt{V(X)}$ schreibt man auch σ.*

3.1.6 Regel von Bayes

- *Eine Wahrscheinlichkeit, die man den Ergebnissen eines Zufallsexperiments anfangs zuordnet heißt apriori Wahscheinlichkeit. Die in der Folge von Beobachtungen möglicherweise geänderte Wahrscheinlichkeit nennt man aposteriori Wahrscheinlihckeit.*

- ***Regel:***
  Man erhält die aposteriori Wahrscheinlichkeit einer Alternative, indem man die Wahrscheinlichkeit des zugehöriugen Pfades durch die totale wahrscheinlichkeit des beobachteten Indizes teilt.

3.2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

-

3.2.1 Binomialverteilung

- ***Definition:***
  Kann eine Zufallsgröße X die Werte $0, 1, ..., n$ und gilt für die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, dann heißt X binomial verteilte Zufallsgröße. Die entspechende Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt Binomialverteilung $B_{n;p}$ mit den Parametern n und p. Statt $P(X = k)$ schreibt man auch $B_{n;p}$.

- ***Satz 1(Erwartungswert):***
  Ist X eine binomialverteilte Zufallsgröße, dann gilt für den Erwartungswert μ:
  $\mu = n \cdot p$

- ***Satz 2(Standartabweichung):***
  Ist X eine binomialverteilte Zufallsgröße, dann gilt für die Standartabweichung σ:
  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

- ***Sigma-Regeln:***
  Für jede binomialverteilte Zufallsgröße X mit der Standartabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ gilt:
  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,680$ *(1σ-Regel)*
  $P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \approx 0,955$ *(2σ-Regel)*
  $P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) \approx 0,997$ *(3σ-Regel)*

3.2.2 Summen von Zufallsgrößen

- ***Definition:***
  Zufallsgrößen X und Y, welche die Werte x_1, ..., x_n und y_1, ..., y_m annehmen, heißen unabhängig, wenn für alle Paare $(x_i; y_j)$ gilt:
  $P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_1) \cdot P(Y = y_1)$. *Andernfalls nennt man X und Y abhängig.*

- ***Satz von Additivität von Erwartungswerten und Varianzen:***
  Gegeben sind die Zufallsgrößen X und Y bei einem gemeinsamen Zufallsversuch, dann gilt:

  1. *Addiert man X und Y, dann addieren sich auch die Erwartungswerte.*
     $E(X) = E(X) + E(Y)$
  2. *Sind X und Y unabhängig und addiert man X und Y, dann addieren sich auch die Varianzen.*
     $V(X) = V(X) + V(Y)$

3.2.3 Rekursive Verteilung

- *Gegeben sind zwei unabhängige Zufallsgrößen X und Y mit den Wertemengen* $A = \{x_1, ..., x_n\}$ *und* $B = \{y_1, ..., y_m\}$*, dann hat die Summe* $Z = X + Y$ *die Wertemenge* $C = \{x_s + y_t | s = 1, ..., n; t = 1, ..., m\}$ *und es gilt für alle* $z \in C : P(Z = z) = P(X = z - y_1) \cdot P(Y = y_1) + ... + P(X = z - y_m) \cdot P(Y = y_m)$.

3.2.4 Hypergeometrische Verteilung

- ***Definition:***
In einer Urne befinden sich N Kugeln, davon M Rote und $N - M$ *Blaue. Es werden n Kugeln ohne Zurücklegen daraus gezogen. Beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der roten gezogenen Kugeln, so gilt:*
$P(X = k) = \frac{\begin{pmatrix} M \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N-M \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}, 0 \leq k \leq n (M \leq N; n \leq N)$
Eine solche Zufallsgröße heißt hypergeometrisch verteilt mit den Parametern n, N und M

- *Eine hypergeometrisch verteilte Zufallsgröße mit den Parametern n, N und M hat den Erwartungswert*
$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$
und die Varianz
$V(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot (1 - \frac{M}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$.

3.2.5 Poisson-Verteilung

- ***Satz:***
Für große Werte von n und kleine Werte von p gilt:
$B_{n;p} = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$ *mit* $\mu = n \cdot p$

- ***Definition:***
Eine Zufallsgröße X heißt Poission-verteilt mit Parameter $\mu > 0$*, wenn gilt:*
$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$ *mit* $k \in N_0$ item ***Satz:***
Eine Poission-verteilte Zufallsgröße X mit Parameter μ *hat den Erwartungswert* μ *und die Variianz* μ.

3.2.6 Geometrische Verteilung

- *Die Wahrscheinlichkeit dafür, wieviele Durchführungen bis zum ersten Treffer nötig sind, wird mit der geometrischen Verteilung berechnet.*

- ***Definition:***
Eine Zufallsgröße X heißt geometrisch verteilt mit Parameter p, wenn gilt:
$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p, k \in N$

- ***Satz:***
Eine geometrisch verteilte Zufallsgröße mit Parameter $p > 0$ *hat den Erwartungswert* $E(X) = \frac{1}{p}$ *und die Varianz* $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

3.2.7 Exponentialverteilung

- ***Definition:***
Eine Zufallsgröße X heißt exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$*, wenn sich die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen a und b annimmt, berechnen lässt durch:*
$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \mathrm{d}x = e^{-\lambda \cdot a} - e^{-\lambda \cdot b}, a, b \geq 0$

- ***Satz:***
Eine exponential verteilte Zufallsgröße X mit Parameter λ *hat den Erwartungswert*
$E(X) = \frac{1}{\lambda}$
und die Varianz
$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma_x = \frac{1}{\lambda}$.

3.2.8 Histogramme und Standartisierung

Histogramme

- *Histogramme sind Daigramme, bei denen relative Häufigkeiten in Form von Flächeninhalten von Rechtecken dargestellt werden. Die Rechteckshöhe nennt man Häufigkeitsdichte. Es gilt*
  $f = \frac{h}{d}$.
  (Mit f = Häufigkeitsdichte (über einem Intervall), h = (zum Intervall gehörige) relative Häufigkeit, d = Intervallbreite)
  Man erhält die relative Häufigkeit in dem man die Häufigkeitsdicht mit der Intervallbreite multipliziert.

Standartisierung

- *Ein Standardisiertes Histogramm wird folgendermaßen erstellt:*
  1. *Verschiebung um $\mu = n \cdot p$ nach links.*
  2. *Streckung des Histogramms in Richtung der y-Achse mit dem Faktor σ*
  3. *Stauchung in Richtung der x-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{\sigma}$*
- $\Rightarrow x_{neu} = \frac{x-\mu}{\sigma}$ *und* $y_{neu} = \sigma \cdot B_{n;p}(k)$

3.2.9 Normalverteilung

- *Ein Merkmal X heißt* ***normalverteilt*** *mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ, wenn sich die Wahrscheinlichkeit $P(a \leq X \leq b)$ berechnen lässt als folgendes Integral:*
  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi_{\mu;\sigma} x \mathrm{d}x = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$
  Die Glockenfunktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ bezeichnet man als Wahrscheinlichkeitsdichte.

- ***Sigma-Regeln:***
  Für alle normalverteilte Merkmale X beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stichprobenwert im 1σ-Intervall um den Erwartungswert($[\mu-\sigma; \mu+\sigma]$) liegt etwa 68%.
  $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) = \Phi(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}) = \Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0,6827$
  Entsprechend erhält man die 2σ- und die 3σ-Regel:
  $P(\mu-2\cdot\sigma \leq X \leq \mu+2\cdot\sigma) = \Phi(\frac{\mu+2\cdot\sigma-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{\mu-2\cdot\sigma-\mu}{\sigma}) = \Phi(2) - \Phi(-2) \approx 0,9545$ *(2σ-Regel)*
  $P(\mu-3\cdot\sigma \leq X \leq \mu+3\cdot\sigma) = \Phi(\frac{\mu+3\cdot\sigma-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{\mu-3\cdot\sigma-\mu}{\sigma}) = \Phi(3) - \Phi(-3) \approx 0,9973$ *(3σ-Regel)*

- ***Zentraler Grenzwertsatz für gleichverteilte Zufallsgrößen:***
  Sind $X_1, X_2, ..., X_n$ unabhänägige und identisch verteilte Zufallsgrößen mit positiver Varianz, so gilt für die Zufallsgröße $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ mit $E(X) = \mu$ und $V(X) = \sigma^1$ bei hinreichend großen Werten von n:
  $P(X \leq x) \approx \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$.
  Die Näherung wird mit wachsender Anzahl n der X_i beliebig genau.

3.3 Testen von Hypothesen

- *Vorgehen beim Testen der Hypothese $p = p_0$*
  1. *Man legt den Stichprobenumfang n und das Signifikanzniveau c fest.*
  2. *Man bestimmt den Annahmebereich $[\mu - c\cdot\sigma; \mu + c\cdot\sigma]$*
  3. *Die Hypothese wird beibehalten, wenn das Stichprobenergebnis im Annahmebereich liegt. Ansonsten wird sie verworfen.*
- *Vorgehen beim einseitigen Testen der Hypothese*
  1. *Man legt den Stichprobenumfang n und das Signifikanzniveau c fest.*
  2. *Man legt die Hypothese fest:*

Linksseitiger Test	***Rechtsseitiger Test***
$H_0: p = p_0 (p \geq p_0)$	$H_0: p = p_0 (p \leq p_0)$
$H_1: p < p_0$	$H_1: p > p_0$

3. *Man bestimmt den Annahmebereich:*

Linksseitiger Test	***Rechtsseitiger Test***
Annahmebereich $[\mu - c\cdot\sigma; n]$	*Annahmebereich* $[0; \mu + c\cdot\sigma]$

4. *Die Hypothese wird beibehalten, wenn das Stichprobenergebnis im Annahmebereich liegt. Ansonsten wird sie verworfen.*

- ***Definition von Fehler und Risiko beim Testen:***

1. *Fehler*
   a) ***Fehler 1. Art:*** *Man lehnt die Hypothese ab, obwohl sie richtig ist.*
   b) ***Fehler 2. Art:*** *Man behält die Hypothese bei, obwohl sie falsch ist.*
2. *Risiken (bzw. Irrtumswahrscheinlichkeiten)*
   a) ***Risiko 1. Art:*** *Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.*
   b) ***Risiko 2. Art:*** *Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.*

3.4 Schätzen von Wahrscheinlichkeiten

- *Das 95%-Vertrauensintervall I zu einer beobachteten relativen Häufigkeit* $h = \frac{X}{n}$ *enthält alle Wahrscheinlichkeiten für die folgendes gilt:*
  $|p - h| \leq 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$
- *Für hinreichend große Werte von n gilt näherungsweise:*
  $I = [h - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}; h + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}]$
- *Ein Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit zur relativen Häufigkeit* $\frac{X}{n}$ *hat höchstens die Länge d, wenn für den Stichprobenumfang folgendes gilt:*
  $n \geq \frac{1{,}96^2}{d^2}$